

Formation continue d'enseignants de mathématiques du secondaire sous l'angle des mathématiques scolaires: Retombées et possibilités pour les enseignants

Jérôme Proulx

Unité de recherche éducationnelle en mathématiques
Faculté d'éducation, Université d'Ottawa



Conseil de recherches en
sciences humaines du Canada

Social Sciences and Humanities
Research Council of Canada

Fonds de recherche
sur la société
et la culture

Québec

Je ne suis jamais critique envers
l'enseignement tel qu'il se pratique. Si vous
voyez 200 000 profs faire la même chose et
que ça vous paraisse idiot, c'est pas parce
qu'il y a 200 000 idiots. C'est parce qu'il y a
un phénomène qui commande la même
réaction chez tous ces gens. Et c'est ce
phénomène qu'il faut comprendre. [...] On
l'optimisera pas avec de l'idéologie, ni avec
des leçons de morale vers les maîtres.

– Guy Brousseau, 1988

Plan de la présentation

1. Contexte général du site de recherche;
2. Clarification des orientations pour le programme de formation;
3. Quelques aspects méthodologiques;
4. Extraits de données recueillies;
5. Discussion/interprétation de ces données;
6. Remarques finales.

1. Contexte de la recherche

- Formation continue en mathématiques;
- 10 rencontres de formation de 3 heures au cours de l'année;
- Six enseignants du secondaire (7 à 12) d'une commission scolaire francophone de l'ouest canadien.

1. Contexte de la recherche

- Point d'entrée des enseignants: intéressés à rafraîchir et revigorer leurs pratiques d'enseignement;
- Mon intention comme chercheur/formateur: Offrir une formation adaptée aux enseignants qui prend en compte leur contexte;
- Il y avait donc un besoin de faire connaissance...

1. Contexte de la recherche

- Familiarisation et faire connaissance:
 - ... 1^{ère} rencontre sur le travail du passage arithmétique-algèbre en résolution de problèmes;
 - Visites en classe et mini-entretiens informels
 - 2^{ème} rencontre sur les travaux de C. Janvier.
- Les enseignants en sont venus à la conclusion que leurs connaissances mathématiques étaient très procédurales...ce qui affectait fortement leur enseignement.

Danielle:

Je suis très séquentielle dans ma façon de travailler [...] j'y vais étape par étape. Le raisonnement je ne l'ai jamais fait. Mon enseignant me disait: tu fais ça, ça, ça, ça, ça et tu obtiens la réponse. Et bien, j'arrivais toujours à la réponse, j'obtenais une très bonne note et tout allait bien.

Carole:

Vous savez pourquoi on n'est pas capable de résoudre par raisonnement? C'est parce que nous n'avons pas été enseignés à raisonner en mathématiques. Moi, j'ai fait copier-coller, répète et "let's go!" ... et j'ai eu 95% en maths!

Lana:

Quand mes élèves me demandent pourquoi ça marche [d'inverser la fraction et de la multiplier pour diviser des fractions], je leur dis simplement que c'est comme ça (rires)!

1. Contexte de la recherche

- Ces difficultés exprimées ne sont toutefois pas nouvelles dans la littérature sur les enseignants du secondaire:
 - Ball (1990) et Bryan (1999): connaissance des procédures, mais difficultés avec le sens derrière;
 - Even (1993) et Hitt-Espinoza (1998): difficultés avec la définition d'une fonction;
 - Schmidt & Bednarz (1997) et Van Dooren, Verschaffel & Onghena (2003): aisance avec algèbre, mais pas avec les solutions arithmétiques pour résoudre des problèmes algébriques traditionnels.

1. Contexte de la recherche

- Recherches sont souvent perçues comme faisant parti d'un modèle « déficitaire » des enseignants;
- Et ne sont évidemment pas généralisables...
- Qu'importe, elles offrent toutefois des informations intéressantes permettant d'inspirer et de guider les pratiques ultérieures;
- Et une d'entre elles est l'intérêt pour le travail en profondeur des concepts mathématiques scolaires (Ball, Bryan, Cooney & Wiegel, etc.)
... et bien plus ...

2. Orientations pour la formation

- Les recherches citées, et les enseignants de la recherche nous montrent que:
 - Les enseignants connaissent beaucoup de mathématiques (même si parfois technique);
 - Ils sont très intéressés par les maths et ont une très bonne relation envers elles (succès et émotif).
- Ceci motive une entrée par les maths et le travail de ces dernières dans les séances de formation (Cooney & Wiegel, 2003).
- Ce qui guidera donc notre approche...

2. Orientations pour la formation

Deux choix importants ont été faits:

- A. Travail des mathématiques *scolaires*;
- B. Bâtir sur les connaissances des enseignants

2. Orientations pour la formation

- A. Travail des mathématiques *scolaires* (et non des mathématiques académiques)
 - Les difficultés soulevées concernent les mathématiques scolaires, c'est-à-dire celles qu'ils enseignent à tous les jours;
 - Elles sont reliées directement à leurs pratiques professionnelles;
 - Mais, de plus, le travail des mathématiques académiques a été fortement critiqué...

2. Orientations pour la formation

Les critiques du travail des maths académiques chez les enseignants: ... abat les mythes...

- 1) Aucune corrélation entre nombre de cours de l'enseignant et la performance des élèves (Begle, 1979; Monk, 1994);
- 2) Présence d'aspects néfastes:
 - Formalisme élevé (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Cooney & Wiegel, 2003; Gattuso, 2000; NRC, 2001; Thompson & Thompson, 1994, 1996);
 - Nature compacte et compressée (Adler & Davis, 2006; Ball & Bass, 2003; Moreira & David, 2005);
 - Traitement complètement différent des mêmes concepts (Moreira & David, 2005)

Un exemple: les nombres rationnels

Pour les mathématiques académiques, un nombre rationnel est défini comme une classe équivalente du couple d'entiers sous la relation:

$$(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow ad=bc .$$

Pour les mathématiques scolaires, le travail des rationnels est basé, entre autres, sur:

- L'extension du système de nombres des naturels aux rationnels;
- Travail des différents sens de la fraction (fractionnement, rapport au tout, etc.)

Un exemple: les nombres rationnels

- Ainsi, pour le même contenu, *de même nom*, des approches très différentes et déconnectées sont utilisées;
- À travers leur insistance sur le formalisme et l'abstraction, le travail des mathématiques académiques n'est pas centré sur le développement de connaissances professionnelles des enseignants au niveau du contenu à enseigner;
- Comme l'explique Bauersfeld (1998), on a longtemps surestimé l'impact positif de la formation académique en mathématiques sur les enseignants du secondaire;
- Ceci questionne leur intérêt pour des enseignants de mathématiques du secondaire (toutefois, pas pour les mathématiciens...).

2. Orientations pour la formation

Deux choix importants ont été faits:

A. Travail des mathématiques *scolaires*;

B. Bâtir sur les connaissances des enseignants

2. Orientations pour la formation

B. Bâtir sur les connaissances des enseignants

- Les enseignants en connaissent beaucoup en mathématiques;
- Pas intentions de « *unlearn* » ou « changer » ces connaissances, mais de les enrichir, les pousser, les développer ...
- Donc, l'emphase est mise sur l'*exploration* des concepts mathématiques (scolaires) par les enseignants – par l'entremise de tâches diverses;
- Ceci a toutefois des conséquences importantes sur le déroulement de sessions de formation...

2. Orientations pour la formation

B. Bâtir sur les connaissances des enseignants

Assises épistémologiques très importantes:

- On s'éloigne des approches *top-down* et *technicistes* qui ont longtemps dominé l'éducation:
 - Modèle de transmission des connaissances;
 - Connaissances à développer (trajectoires) prédéterminées.
- Deux problèmes majeurs de ces approches
 - Enseignant en tant que technicien, dans des situations prévisibles (Bednarz, 2000);
 - Pas de prise en compte des enseignants dans le processus (Dawson, 1999; Krainer, 2006), comme des vases à remplir.

2. Orientations pour la formation

B. Bâtir sur les connaissances des enseignants

En se centrant sur l'exploration mathématique des enseignants:

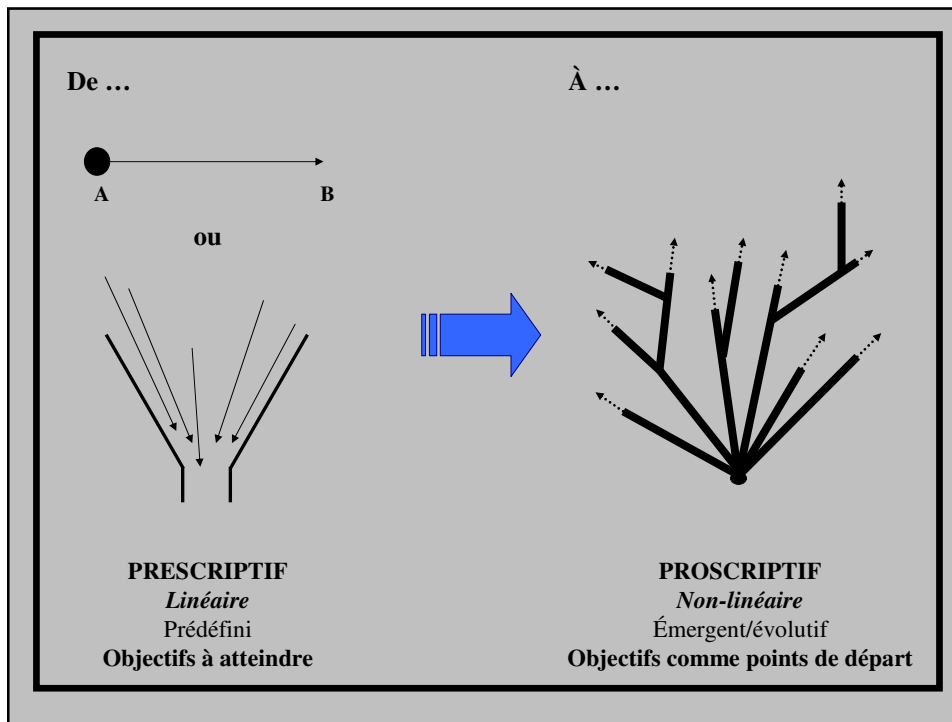
- On ne peut prédire la direction et les retombées des sessions;
- Il n'y a pas d'agenda rigide et prescriptif à suivre, uniquement des points de départ sur lesquels bâtir;
- Le déroulement des sessions est fortement dépendant des enseignants eux-mêmes et leurs explorations, questions, intérêts, compréhensions, etc.;

2. Orientations pour la formation

B. Bâtir sur les connaissances des enseignants

En se centrant sur l'exploration mathématique des enseignants:

- Pour le formateur, ceci demande une foi en l'émergence de la connaissance et l'acceptation de l'imprévisible (et sa richesse...) – la session suit son propre cours;
- Les tâches mathématiques sont utilisées comme point de départ, pour déclencher les explorations mathématiques des enseignants;
- Contraste entre « Objectifs à atteindre à la fin » *et* « Objectifs comme point de départ » (Proulx, 2007)

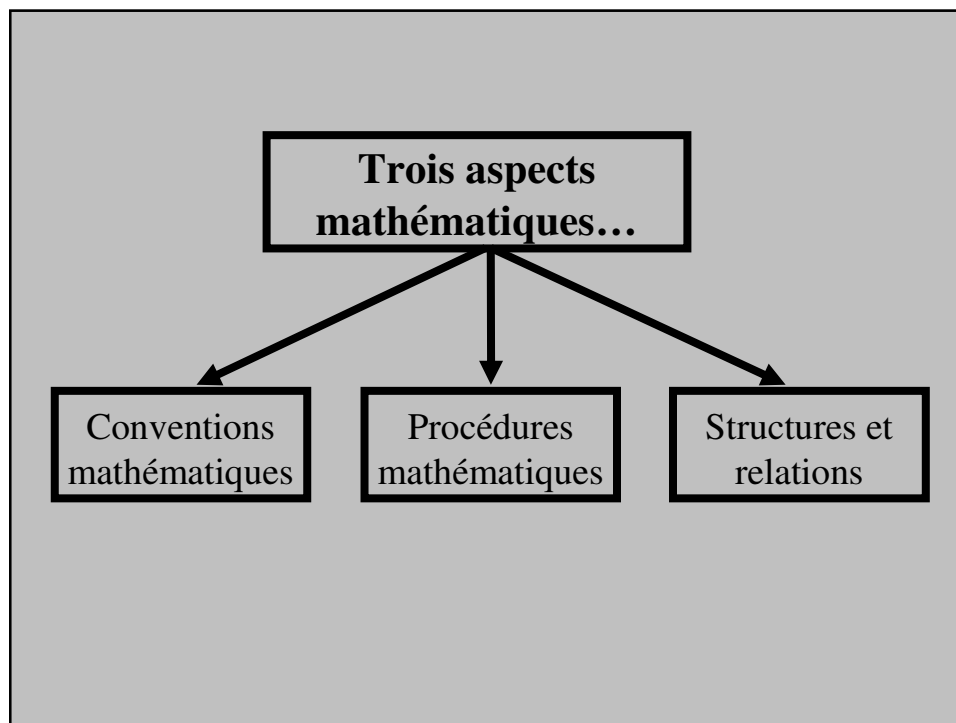


3. Aspects méthodologiques

- Étude de cas
- Six enseignants du secondaire;
- 10 sessions de formation (filmées) de 3 heures au courant de l'année scolaire;
- Double rôle de formateur et chercheur;
- Chaque session était:
 1. résumée à chaud;
 2. discutée avec le comité scientifique et ré-annotée;
 3. transcrite au long durant la semaine suivante;
 4. Prise de notes continues en (4) sur le développement mathématique et les événements frappants (jumelés);

3. Aspects méthodologiques

- Thèmes mathématiques des sessions:
 - Les thèmes ont été choisis en fonction de leur forte propension aux formules et procédures mécaniques (volume, aire, géométrie analytique, etc.);
 - Et, de l'intérêt des enseignants (opérations sur les fractions, algèbre, etc.);
- Tâches mathématiques offertes:
 - Pas une simple application de formules;
 - Représentent un défi/intérêt mathématique particulier;
 - Concerne des conceptions erronées connues;
 - Diverses, mais centrées sur les maths.
 - Trois aspects mathématiques travaillés dans les tâches..



4. Les données des sessions

Un exemple de chacun des aspects travaillés:

1. **Conventions:** taux de variation:



2. **Procédures:** division de fractions

3. **Relations:** volume et aire latérale

Le travail des conventions, un exemple

1. *Premières réactions:*

Lana: Mais en fait cet étudiant mérite 0 points.

Jérôme: Pourquoi dis-tu qu'il mérite 0 points?

Lana: Il ne *comprend* absolument rien.

Jérôme: Que veux-tu dire?

Lana: Il ne *comprend* pas parce que pour lui le taux de variation il dit que c'est la variation en x divisé par la variation en y . C'est le contraire, il est arrivé par chance à la réponse.

Le travail des conventions, un exemple

2. Le début d'une conversation ... et de réflexions

Jérôme: Mais pourquoi dis-tu que cet élève ne comprend absolument rien? Parce que tout ce que cet élève a fait est d'inverser le x et le y .

Lana: Oui.

Jérôme: Mais, en fait, c'est une convention mathématique.

Lana: Le taux de variation est toujours vertical sur horizontal.

Jérôme: Mais c'est une convention mathématique; ça aurait pu être horizontal sur vertical.

Lana: [rire nerveux, hésitante] Ouais...je suis d'accord avec toi [se retirant en se plaçant sur deux pattes]

Le travail des conventions, un exemple

2. Le début d'une conversation ... et de réflexions

[...]

Lana: Si la *convention* avait été l'autre côté, je suis d'accord, mais la convention est y sur x et non x sur y .

Toutefois, Lana n'était pas totalement convaincue...

Ceci a amené le groupe à réfléchir sur la cohérence du corps de connaissances en mathématiques...

Il est ainsi devenu possible pour quelqu'un de comprendre les concepts sans les représenter de façon conventionnelle.

Le travail des conventions, un exemple

3. *Distinguer les conventions mathématiques de la compréhension mathématique*

Ouverture d'une discussion envers d'autres concepts reliés...

Équation linéaire: $y = mx + b \rightarrow x = my + b$

Lana: Ce serait bon, par contre, lorsqu'il écrit $x=2y+b$.
C'est bon parce qu'il l'a bon, mais il ne comprend pas l'idée des variables dépendantes et indépendantes..... que nous avons supposé
C'est encore une convention!

Le travail des conventions, un exemple

4. *Percevoir des conventions en maths.... ailleurs...*

Les conventions sont devenues de plus en plus présentes pour eux en mathématiques, les enseignants sont devenus sensibilisés à leur présence

Ils ont commencé à les observer à d'autres endroits et à réfléchir à leur présence

Par exemple, dans le plan Cartésien:



Le travail des conventions, un exemple

4. *Percevoir des conventions en maths.... ailleurs...*

Jérôme: Donc, si un élève pour ce point spécifique vous dit, pour le point (3,-1), vous dit (-1,3). Est-ce que cet élève reçoit un "0"?

Carl: Oui.

Gina: Oui.

Jérôme: Pourquoi?

Gina: [Hésitant] Parce que il n'est pas dans le bon quadrant.

Lana: Non! C'est encore une convention ... On a encore décidé que nous placerions le x en premier et le y en second.

Le travail des conventions, un exemple

4. *Percevoir des conventions en maths.... ailleurs...*

- Lana en fait commençait à percevoir les mathématiques en termes de conventions, ou plutôt arrivait à voir des conventions en mathématiques (de faire ressortir la présence de conventions en mathématiques);
- Et, elle était capable de l'expliquer, de convaincre et d'être convaincante (haut niveau d'appropriation);
- Elle développait ses compréhensions sur ces aspects et ses façons de les parler.

4. Les données des sessions

Un exemple de chacun des aspects travaillés:

1. **Conventions:** taux de variation
2. **Procédures:** division de fractions ←
3. **Relations:** volume et aire latérale

Le travail des procédures...

- L'intention était de permettre aux enseignants d'approfondir leurs compréhension des procédures mathématiques;
- Développer une compréhension relationnelle de ces procédures (Skemp, 1978);
- *Tout comme pour le travail des conventions, on se rend compte que le travail des procédures en profondeur a un impact:*
 - Au niveau mathématique;
 - Et au niveau de leurs réflexions sur l'enseignement et leurs possibilités d'enseignement.

Le travail des procédures...

- La division de fractions:
 - Travail de pliage de papier et raisonnement des opérations (Boissinotte, 1998);
 - Résolution de problèmes en mots (Schifter, 1998) et faire du sens par un contexte;
 - Algorithmes...
- Faire du sens par la division par 1
 - La plus simple des divisions... s'y ramener
 - Exemple: $\frac{5}{12} \div \frac{3}{4}$

Le travail des procédures...

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{12} \times \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}} = \frac{\frac{5}{12} \times \frac{4}{3}}{1} = \frac{5}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{20}{36}$$

Lana: [à Erica] Oh, je n'avais jamais pensé faire ça!

Jérôme: Ça me donne

Lana: [Impressionnée] Donc, dans un sens, tu peux *montrer* que lorsque tu divises une fraction, ça revient à faire l'inverse. ***

Le travail des procédures...

- Gina → « Je n'avais jamais réalisé que c'était un truc! »
 - Erica → « Je n'avais jamais pensé d'expliquer la division de fractions ainsi. Je vais l'utiliser bientôt avec mes élèves pour leur expliquer pourquoi on doit multiplier par l'inverse. En fait, demain matin! »
- Le lien entre les connaissances mathématiques et leur enseignement ressort fortement ici:
- Le développement du premier provoque de nouvelles possibilités pour le second... (et le contraire aussi ...)

Le travail des procédures...

- Lors de la session suivante, pour compléter, j'ai offert cet algorithme aux enseignants:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3 \div 1}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$$

- Est-ce que cet algorithme fonctionne toujours?
- Pourquoi n'est-il pas utilisé dans les écoles?
- Pas toujours utile

Le travail des procédures...

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3 \div 2}{4 \div 5} = \frac{3/2}{4/5}$$

- La division demeure...
- Mais la réponse est toutefois bonne... (similaire à la multiplication de fractions)
- Besoin de facteurs communs au numérateur et dénominateur...

Le travail des procédures...

Gina: L'autre question que je me pose à propos de la division et multiplication de fractions est pourquoi on ne pense pas à placer sur le même dénominateur? On le montre aux élèves à faire l'addition et la soustraction avec et ensuite lorsqu'on travaille avec la multiplication et la division, on l'élimine.

Jérôme: En fait, c'est parce que ça change pas grand chose [à la réponse]

Gina: Mais ça marche quand même.

Jérôme: Oui, mais si j'ai $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$, même si je le place sur 4, comment cela est-il avantageux?

Gina: Ça donne $\frac{2}{4}$.

Jérôme: Oui, ça me donnera $\frac{6}{16}$. Que je multiplie 4 par 4 ou 4 par 2 ...

Le travail des procédures...

- Gina: Oui, je comprends, ça ne donne pas grand chose de plus mais...
- Jérôme: Mais est-ce que ça change quelque chose pour la division?
- Gina: Non, ça marche aussi.
- Jérôme: Tu parles donc de donner une façon de faire pour toutes les opérations, c'est-à-dire de toujours placer sur le même dénominateur pour les 4 opérations?

On peut voir ici la richesse des réflexions mathématiques et même pédagogiques... suite à l'exploration d'un « nouvel » algorithme

... qui amèneront à réaliser que cette approche se veut très efficace avec ce « nouvel » algorithme...

Le travail des procédures...

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{20} \div \frac{8}{20} = \frac{15 \div 8}{20 \div 20} = \frac{15 \div 8}{1} = \frac{15}{8}$$

- Gina: He, he, Bingo!
- Jérôme: On vient de trouver un algorithme!
- Gina: [Rires de joie] Je parie que ça va toujours marcher, parce que tu obtiens toujours un "1" en bas. C'est génial!

Le travail des procédures...

- Les exemples ci-haut offrent des illustrations de ce que les explorations mathématiques peuvent provoquer chez les enseignants:
 - Approfondir leurs connaissances des concepts mathématiques qu'ils utilisent fréquemment;
 - Retravailler les concepts – *élaborations récursives* (Davis & Simmt, 2006)
- D'autres exemples peuvent être cités:
 - Volume... vers l'aire ...

Le lien avec la motivation des gens est que si ils retirent une satisfaction personnelle de la compréhension relationnelle, ils ne vont pas uniquement essayer de comprendre de façon relationnelle les choses placées devant eux, mais aussi de fouiller activement de nouvelles choses et d'autres concepts par eux-mêmes - comme un arbre qui étend ses racines ou un animal qui explore des nouveaux territoires en quête de nourriture.

— Skemp, 1978, p. 13, ma traduction

Le travail des procédures...

- Les exemples ci-haut offrent des illustrations de ce que les explorations mathématiques peuvent provoquer chez les enseignants:
 - Approfondir leurs connaissances des concepts mathématiques qu'ils utilisent fréquemment;
 - Retravailler les concepts – *élaborations récursives* (Davis & Simmt, 2006)
- D'autres exemples peuvent être cités:
 - Volume... vers l'aire ...
 - **création d'*habitus* mathématiques.**

5. Discussions/interprétations

Et alors? Que voit-on dans tout cela?

5. Discussions/interprétations

1. Les enseignants ont appris beaucoup de mathématiques, les mêmes qu'ils enseignent:
 - Nouvelles compréhensions, nouvelles façons de voir, de faire, de comprendre (et de parler des mathématiques);
 - Des façons qu'ils n'avaient jamais pensé ou apprises auparavant;
 - *Habitus* mathématiques...;
 - Très désireux d'en savoir plus... (Gina);

5. Discussions/interprétations

2. L'approfondissement de leurs connaissances mathématiques a fait ressortir chez eux des idées et réflexions pédagogiques/didactiques ...ayant potentiellement des répercussions importantes sur leur enseignement:
 - Nouvelles façons de faire du sens des raisonnements et réponses d'élèves;
 - Nouvelles façons d'approcher les concepts dans l'enseignement (les concepts ne sont plus les mêmes, ils ont évolué...).

5. Discussions/interprétations

3. On perçoit l'inséparabilité entre les mathématiques scolaires et leur enseignement pour les enseignants:
 - Malgré l'entrée par les maths, les aspects d'enseignement ressortent;
 - Un divorce presque impossible (Brodie, 2004);
 - On peut dire qu'ils ont développé des compétences mathématiques et pédagogiques (*pedagogical and mathematical powers* – Cooney, 1994).

5. Discussions/interprétations

4. La création de possibilités:
 - Aucune garantie sur les pratiques des enseignants;
 - Les enseignants ont plus de possibilités, possibilités qu'ils n'avaient pas avant;
 - Mais leur façons d'approprier le tout dans leurs pratiques dépend d'eux;
 - L'important est que maintenant ils ont accès à ces possibilités mathématiques...
 - C'est là l'idée de « non-trajectoire » et d'émergence: c'est la participation au développement professionnel, au développement de connaissances mathématiques reliées à leurs pratiques professionnelles... **les enseignants ne sont pas des techniciens...**

6. Remarques finales

Quatre aspects importants pour la formation
(continue) des enseignants du secondaire:

1. Les enseignants du secondaire sont très intéressés à apprendre des mathématiques;
2. Ils en connaissent beaucoup en mathématiques:
 - 1 et 2 pointent vers une certaine « disposition » pour en apprendre davantage en maths (Cooney & Wiegel, 2003; Swafford et al., 1997)

6. Remarques finales

Quatre aspects importants pour la formation
(continue) des enseignants du secondaire:

1. Les enseignants du secondaire sont très intéressés à apprendre des mathématiques;
2. Ils en connaissent beaucoup en mathématiques;
3. Même si évident, les enseignants *peuvent* en apprendre beaucoup en mathématiques...
 - L'idée n'est pas de savoir ce qu'ils savent ou ne savent pas, mais que leur orientation, appréciation et connaissances peuvent leur permettre d'en apprendre beaucoup;
 - Quelque chose que nous pouvons fortement prendre avantage de comme formateur...

6. Remarques finales

Quatre aspects importants pour la formation (continue) des enseignants du secondaire:

1. Les enseignants du secondaire sont très intéressés à apprendre des mathématiques;
2. Ils en connaissent beaucoup en mathématiques;
3. Même si évident, les enseignants *peuvent* en apprendre beaucoup en mathématiques...
4. Les considérations pédagogiques émergent de façon naturelle chez les enseignants.

6. Remarques finales

Finalelement, évidemment...

- Les enseignants ne peuvent enseigner ce qu'ils ne connaissent pas (Cooney & Wiegel, 2003; Huillet, 2007);
- Mais il y a plus...
- Ce type de travail leur offre des nouvelles possibilités qu'ils n'avaient simplement pas avant
- Cette recherche informe donc sur le potentiel que peut avoir une approche de formation axée sur le développement des connaissances mathématiques (scolaires) – et leur exploration.

Formation continue d'enseignants de mathématiques du secondaire sous l'angle des mathématiques scolaires: Retombées et possibilités pour les enseignants

Jérôme Proulx

Unité de recherche éducationnelle en mathématiques
Faculté d'éducation, Université d'Ottawa



Conseil de recherches en
sciences humaines du Canada

Social Sciences and Humanities
Research Council of Canada

Fonds de recherche
sur la société
et la culture

Québec 